

CONTROLE DE SISTEMA DINÂMICO CONSIDERANDO REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DA SAÍDA DISPONÍVEL – APLICAÇÃO EM ¼ DE SUSPENSÃO ATIVA

Luciano Paulo da Silva Filho¹, Edson Italo Mainardi Júnior¹, Diogo Ramalho de Oliveira¹

¹Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Mato Grosso do Sul – Três Lagoas - MS

luciano.filho@estudante.ifms.edu.br, edson.mainardi@ifms.edu.br, diogo.ramalho@ifms.edu.br

Resumo

Este trabalho apresenta um projeto de controle robusto H_∞ , considerando realimentação estática da saída disponível da planta do sistema. O projeto de controle é aplicado em um sistema que representa ¼ de suspensão ativa de um veículo, para uma classe de sistemas dinâmicos lineares. O desenvolvimento do projeto do controlador é baseado em função de Lyapunov quadrática, LMIs (Linear Matrix Inequalities), incertezas politópicas e um custo garantido denominado H_∞ . A motivação do trabalho é projetar um sistema de controle robusto, considerando incertezas politópicas na planta, a fim de demonstrar uma comparação na resposta temporal dos estados do sistema dinâmico realimentado e sistema dinâmico em malha aberta.

Palavras-chave: Controle robusto H_∞ , LMIs, Realimentação estática da saída.

Introdução

O interesse da comunidade científica no estudo de controle de sistemas dinâmicos vem crescendo nos últimos anos. Segundo Oliveira et al (2014) esse interesse vem do fato de que os sistemas dinâmicos são aplicados em diversas áreas importantes da engenharia, como exemplo: sistemas automotivos, aeronáutica, satélites, entre outros. Este é um campo com inúmeras opções de técnicas de controle, porém, atualmente a comunidade acadêmica vêm utilizando funções função de Lyapunov, para o estudo de desenvolvimento de técnicas de controle moderno a fim de garantir a estabilidade do sistema. Em geral, pressupõe-se que o vetor de estado $x(t)$ de um sistema dinâmico esteja completamente disponível para realimentação.

Entretanto, na existência de problemas práticos nos quais o vetor $y(t)$ é mais fácil de se obter do que o vetor de estado $x(t)$, torna-se interessante o projeto de uma lei de controle que assegure a estabilidade assintótica para a classe de sistemas dinâmicos com acesso somente à saída da planta (Yoshimura et al., 2013). Mais especificamente, na prática, algumas dificuldades de acesso aos vetores de estado são encontradas, tais como, pontos de medição em locais de difícil acesso e número de sensores disponíveis, o que tornam praticamente impossível realizar a medição de todas as variáveis que compõem o vetor de estado. Assim, uma possível alternativa para solucionar esse problema é a

realimentação do vetor $y(t)$ disponível (Sadabadi, 2016, Syrmos et al., 1997). Ademais, ressalta-se que em aplicações práticas, é comum que o sistema real esteja sujeito a ruídos em suas medições e/ou alguns fatores práticos sejam desconsiderados durante a modelagem matemática do sistema. Dessa forma, a abordagem de controle robusto deve ser considerada a fim de garantir estabilidade e um adequado funcionamento do sistema, mesmo quando operando com falhas estruturais ou incertezas na planta.

Para Esteves (2020) a abordagem via desigualdades matriciais lineares (em inglês, Linear Matrix Inequalities, LMIs) para garantir a estabilidade do sistema, baseia-se na conjuntura da teoria de Lyapunov. Logo, a utilização de LMIs permite incluir critérios de desempenho que visam, por exemplo, melhorar o tempo de resposta do sistema e tratar da rejeição de distúrbios, utilizando abordagens que consideram filtros do tipo H_2 e H_∞ . Como exemplo de aplicações, pode-se citar Chang, Park e Zhou (2015) que apresentaram condições suficientes para controladores com realimentação da saída, utilizando LMIs, e igualdade matricial linear (do inglês, Linear Matrix Equalities - LMEs), e controle robusto H_∞ .

O trabalho aqui apresentado, propõe o desenvolvimento de um controlador para sistemas lineares incertos considerando o acesso somente à saída disponível da planta. A especificação de um índice de desempenho dinâmico, por exemplo, controle H_∞ , também é considerada na abordagem. O projeto foi baseado no critério de estabilidade de Lyapunov através de uma função quadrática e LMIs (Barreda, 2020). Primeiramente, são apresentados estudos e simulações do sistema em malha aberta, tal que demonstram a estabilidade do sistema linear. Com base nesta teoria, é proposta uma nova lei de controle dependente da saída disponível da planta, que assegura a estabilidade global do sistema linear realimentado como mostrado em Sadabadi (2016).

Toda a teoria desenvolvida é ilustrada através de exemplos e os resultados de simulações demonstraram que, quando factíveis, o teorema proposto apresenta adequado desempenho.

Metodologia

Os problemas de controle de sistemas dinâmicos com variáveis de estado parcialmente disponíveis vêm

despertando o interesse da comunidade científica. A solução deste tipo de abordagem está entre um dos problemas mais desafiadores da literatura, devido à sua característica não convexa (Sadabadi, 2016). Desse modo, considere um sistema dinâmico linear invariante no tempo na seguinte forma de espaço de estados:

$$\dot{x} = A(\beta)x(t) + Bu(t) + Hw(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $w(t) \in \mathbb{R}^p$ a entrada exógena tal que $w(t) \in L_2[0, \infty)$, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ a saída controlada. Na matriz $A(\beta)$, o vetor $\beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_r]'$ representa as incertezas politópicas (ou falhas estruturais). A matriz $A(\beta)$ pode ser representada por combinações convexas de seus vértices:

$$A(\beta) = \sum_{j=1}^r \beta_j A_j \quad (3)$$

sendo $\sum \beta_j = 1$, para j de 1 até r e $\beta_j \geq 0$.

Considere ainda que o sistema seja excitado por uma entrada exógena $w(t)$, com uma energia finita. A norma H_∞ estabelece um limitante para a influência da entrada exógena $w(t)$ na saída $y(t)$, sendo essa calculada como:

$$\|H(s)\| = \max_{w \neq 0} \frac{\|y\|_2}{\|w\|_2}, \quad w(t) \in \delta_2 \quad (4)$$

sendo $H(s)$ a função de transferência do sistema. O custo garantido H_∞ do sistema é então definido como o valor mínimo de finito, tal que:

$$\|y(t)\| \leq \gamma \|w(t)\|_2 \quad (5)$$

Logo, pode-se dizer que a estabilidade do sistema com o custo garantido H_∞ é assegurada, se, dada a função de Lyapunov quadrática, $V(x) = x'Px$, tal que $P = P' > 0$, tem-se que:

$$\dot{V}(x) + y'y - \gamma^2 w'w < 0 \quad (6)$$

Seguindo, considerando a lei de controle $u(t) = ky(t)$, sendo $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída do sistema linear disponível. A partir de (1), pode-se reescrever o sistema realimentado por:

$$\dot{x}(t) = (A(\beta)x(t) + BKC)x(t) + Hw(t) \quad (7)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (8)$$

Assim, considerando inicialmente $u(t)=0$ (malha aberta), obtemos nesse contexto o seguinte problema.

Problema 1: Determinar uma função $u(\cdot)$ tendo como estratégia de controle $u(y(t))$, que torne o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema dinâmico (1) – (3), satisfazendo um certo

índice de desempenho, por exemplo, custo H_∞ , assintoticamente estável.

O teorema a seguir apresenta uma solução para o problema proposto, considerando $u(t)=0$ (malha aberta), considerando um certo índice de desempenho, por exemplo, custo H_∞ .

Teorema 1 - Assuma que $p > m$. Então, o Problema 1, tem solução e o sistema é assintoticamente estável se, existir um escalar $\mu > 0$ e matrizes $i \in K$, de dimensão adequada, satisfazendo o seguinte problema de otimização:

min μ

s.a $P = P' > 0$

$$\begin{bmatrix} Ai'P + PAi + C'C & H'P \\ PH & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

$i \in K$, sendo $\gamma^2 = \mu > 0$. Ademais, se as condições impostas são factíveis, então assegura-se que:

$$\|y(t)\|_\infty \leq \sqrt{\mu}. \quad (10)$$

Problema 2: Projetar uma lei de controle K que torna o sistema dinâmico (1)–(3), satisfazendo o índice de desempenho custo H_∞ (5), globalmente assintoticamente estável. Uma solução é apresentada no Teorema 02 a seguir.

Teorema 02 - Assuma que $p > m$. Então, o Problema 2, tem solução e o sistema é assintoticamente estável se, existir um escalar $\mu > 0$ e matrizes $N \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $P = P' > 0$, de dimensão adequada, satisfazendo o seguinte problema de otimização:

min μ

s.a $P = P' > 0$

$$\begin{bmatrix} Ai'P + PAi + BNC + C'N'B' + C'C & H'P \\ PH & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

$$B'P = MB' \quad (12)$$

sendo $\gamma^2 = \mu > 0$. Ademais, se as condições impostas são factíveis, então a matriz K é dada por:

$$K = (M')^{-1}N \quad (13)$$

e então assegura-se que:

$$\|H(t)\|_\infty \leq \sqrt{\mu}. \quad (14)$$

Demonstração: Considere que (11)-(12) são factíveis. Então, para $x \neq 0$ e $w \neq 0$, segue que:

$$0 > [x' \ w'] \begin{bmatrix} Ai'P + PAi + BNC + C'N'B' + C'C & H'P \\ P'H & -\mu I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \\ = x'(Ai'P + PAi + BNC + C'N'B' + C'C)x + 2x'PHw - \mu w'w.$$

Agora, note que $K = (M')^{-1}N$, e assim, $M'K = N$. Logo, relembrando que $\mu = \gamma^2$, note que:

$$x'(A_i'P + PA_i + BNC + C'N'B' + C'C)x + 2x'PHw - \mu w'w$$

$$= x'(A_i'P + PA_i + BM'KC + C'K'MB' + C'C)x + 2x'PH - \gamma^2 w'w$$

Então de (12):

$$= x'(A_i'P + PA_i + PBKC + C'K'B'P + C'C)x + 2x'PHw - \gamma^2 w'w.$$

Seguindo, multiplicando a equação anterior por α_j e levando em conta a soma de $j = 1$ até $j = r$, temos:

$$= x'((A(\alpha) + BKC)'P + P(A(\alpha) + BKC))x + x'C'Cx$$

$$+ 2x'PHw - \gamma^2 w'w$$

$$= \dot{V}(x) + y'y - \gamma^2 w'w.$$

Considerando a candidata a função de Lyapunov $V(x) = x'Px$, note que $V(x) \neq 0$ para $x \neq 0$. A demonstração está concluída.

Resultados e Discussão

Considera o sistema didático de suspensão ativa de um quarto de veículo fabricado pela Quanser. O modelo pode ser visto na Figura 1 (OLIVEIRA et al, 2014).

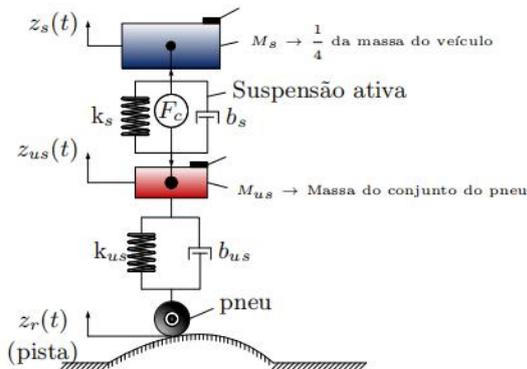
Figura 1 – Suspensão ativa – um quarto de veículo.



Fonte: (Oliveira et al., 2014).

Para se obter um esquema matemático que represente o sistema real, é proposto um modelo esquemático, representado na Figura 2 (Oliveira et al, 2014).

Figura 2 – Modelo esquemático



Fonte: (Oliveira et al., 2014).

O sistema consiste de um conjunto composto por duas massas, denominadas M_s e M_{us} , sendo que a massa M_s representa 1/4 do corpo total do veículo e a massa M_{us} corresponde à massa do conjunto do pneu do veículo. A massa M_s é suportada pela mola k_s e pelo amortecedor b_s . Já a massa M_{us} é suportada pela mola k_{us} e pelo amortecedor b_{us} .

Seguindo, uma das forma de se atenuar vibrações causadas por irregularidades na pista é através do sistema de suspensão ativa, o qual é representado por um motor (atuador) conectado entre as massas M_s e M_{us} , e controlado pela força F_c . Então, a fim de expor o sistema de suspensão ativa às mais diversas condições de irregularidades proporcionadas por uma pista de rolagem, é possível escolher um sinal de referência. Assim, defina o sinal z_r como sendo o sinal de referência da pista.

Agora, considere o modelo em espaço de estados, o qual pode representar o modelo esquemático ilustrado na Figura 2.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{b_s}{M_s} & 0 & \frac{b_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{b_s}{M_{us}} & -\frac{k_{us}}{M_{us}} & -\frac{(b_s+b_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} x(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{M_{us}} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{b_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix} w(t),$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \dot{z}_s \\ z_{us}(t) - z_r(t) \\ \dot{z}_{us} \end{bmatrix} \quad e \quad w(t) = \dot{z}_r,$$

sendo que as posições $z_s(t)$, $z_{us}(t)$ e $z_r(t)$ são medidas através de encoders. Os valores das constantes podem ser encontrados na Tabela 1. A ideia principal é analisar através do modelo em espaço de estados a resposta dinâmica do sistema ilustrado na Figura 02.

Tabela 1 – Parâmetros do sistema.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa de ¼ do corpo total do veículo (Kg)	M_s	2,45
Massa do conjunto do pneu (Kg)	M_{us}	1
Constante de rigidez da mola (N/m)	K_s	900
Constante da rigidez da mola (N/m)	K_{us}	2500
Coefficiente de amortecimento (N s / m)	b_s	7,5
Coefficiente de amortecimento (N s / m)	b_{us}	5

Fonte: (Oliveira et al., 2014).

Ademais, o objetivo principal deste trabalho é estudar, propor e implementar uma lei de controle considerando o sistema dinâmico atuando com incertezas politópicas e/ou falhas estruturais, via realimentação da saída disponível.

Logo, considerando que essas incertezas podem assumir valores de $\pm 10\%$ em relação aos valores nominais, descritos na Tabela 1, considere que:

$$810 \leq k_s \leq 990 \text{ (N/m)},$$

$$2250 \leq k_{us} \leq 2750 \text{ (N/m)}.$$

Portanto, a fim de realizar o projeto de controle, considere os seguintes vértices do politopo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -404,0816 & -3,0612 & 0 & 3,0612 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 990 & 7,5 & -2750 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -404,0816 & -3,0612 & 0 & 3,0612 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 990 & 7,5 & -2250 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -330,6122 & -3,0612 & 0 & 3,0612 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 810 & 7,5 & -2750 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -330,6122 & -3,0612 & 0 & 3,0612 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 810 & 7,5 & -2250 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$B = [0 \ 0,4081 \ 0 \ -1]^T,$$

$$H = [0 \ 0 \ -1 \ 5]^T.$$

De início, é interessante investigar a resposta dinâmica do sistema sem realimentação (malha aberta), para tal simulação tem-se sinal de referência $w(t)$ sendo uma onda quadrada de 0,02m de amplitude, com frequência de 1/3Hz com largura de pulso de 50% e considerando os valores descritos na Tabela 1. Considerando o Teorema 01, uma solução encontrada foi $\|H(s)\|_\infty = 287,3953$. A Figura 3, representa a resposta dinâmica do sistema em malha aberta. Note que o sistema é estável, entretanto as oscilações geram desconforto ao motorista.

Seguindo, para a resposta dinâmica do sistema realimentado, considerando $u(t)=ky$ (malha fechada) para tal simulação tem-se a matriz de saída $C=[1 \ 0 \ -1 \ 0; \ 0 \ 1 \ 0 \ -1]$, sinal de referência $w(t)$ sendo uma onda quadrada de 0,02m de amplitude, com frequência de 1/3Hz com largura de pulso de 50%. Considerando o Teorema 02, uma solução encontrada foi $\|H(s)\|_\infty = 7,3226$ e o seguinte controlador, $K=[-1,0072 \ -0,0166] \times 10^4$. A Figura 4 ilustra a resposta dinâmica do sistema. Note que o sistema é estável, com

oscilações menores que os sistema em malha aberta e que conseqüentemente geram um melhor conforto ao motorista.

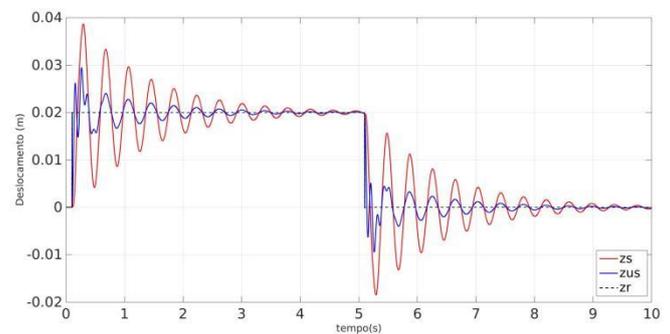
É interessante investigar também a região de factibilidade das LMIs relacionadas ao controle dinâmico. Assim, considere os seguintes intervalos para os parâmetros bus e Mus:

$$5 \leq \text{bus} \leq 15,$$

$$1 \leq \text{Mus} \leq 10,$$

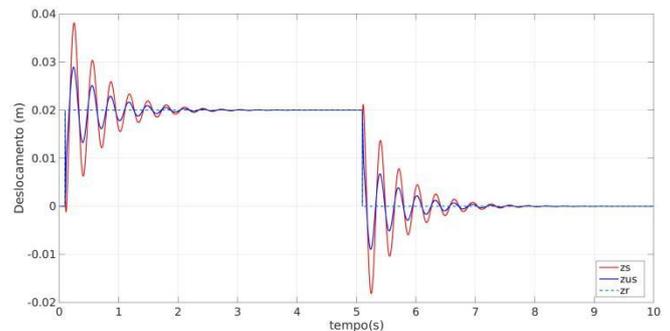
Considerando o Teorema 01 e o Teorema 02, temos a seguinte região de factibilidade apresentada na Figura 05.

Figura 3 – Resposta dinâmica - Teorema 1



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 4 - Resposta Dinâmica (Malha Fechada)



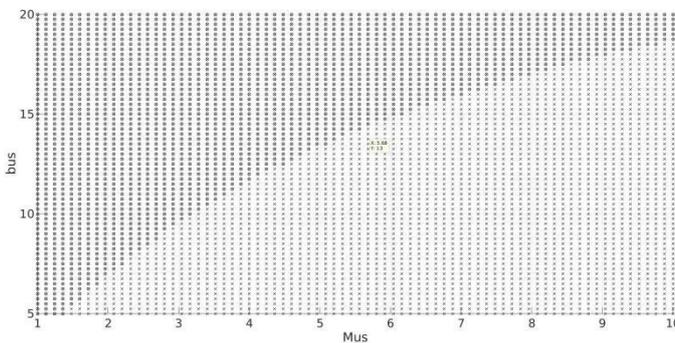
Fonte: Elaboração do próprio autor.

A análise da Figura 5 evidencia uma região factível proposta pelo Teorema 2 maior que a proposta pelo Teorema 01, visto que o Teorema 02 permitiu alocar os autovalores do sistema em malha fechada.

Considerações Finais

O presente trabalho realizou o estudo do controle com incertezas politópicas para sistemas dinâmicos apresentando a resposta dinâmica do sistema em malha aberta e fechada, garantindo a validação dos teoremas de controle aplicado a planta.

Figura 5 – Região de factibilidade, sendo Teorema 01 - “o” e Teorema 02 - “x”.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao IFMS pelo apoio financeiro referente ao Edital 029/2022 - Propi / IFMS - Iniciação Científica e Tecnológica - Edital de Pesquisa.

Referências

- BARREDA, A. E. G. “Investigação experimental de controle robusto aplicado ao problema de rastreamento de pêndulo invertido considerando incertezas politópicas”/ Adrian Eduardo Gonzalez Barreda. 2020.
- CHANG, X. H.; PARK, J. H.; ZHOU, J. "Robust static output feedback H_∞ control design for linear systems with polytopic uncertainties". Systems and Control Letters, Amsterdam, v. 85, p. 23–32, 2015.
- ESTEVES, Lucas Mangili. CONTROLE ROBUSTO ∞ COM REALIMENTAÇÃO PARCIAL DOS ESTADOS APLICADO A DIFERENTES SISTEMAS MECÂNICOS. 2020. 70 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Elétrica, Unesp, Ilha Solteira, 2020.
- OLIVEIRA, D. R. ; TEIXEIRA, M. C. M. ; ASSUNCAO, E. ; Souza, W. A. ; MOREIRA, M. R. ; SILVA, J. H. P. . Projeto de Controle Robusto H_∞ Chaveado: Implementação Prática em um Sistema de Suspensão Ativa. In: XX Congresso Brasileiro de Automática, 2014, Belo Horizonte. XX Congresso Brasileiro de Automática, 2014.
- SADABADI, M. S.; PEAUCELLE, D. "From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey". Annual Reviews in Control, Oxford, v. 42, p. 11–26, 2016.
- SYRMOS, V. L.; ABDALLAH, C. T.; DORATO, P.; GRIGORIADIS, K. "Static output feedback - a survey". Automatica, Oxford, v. 33, n. 2, p. 125–137, 1997.
- YOSHIMURA, V. L.; ASSUNÇÃO, E.; DA SILVA, E. R. P.; TEIXEIRA, M. C. M.; MAINARDI JÚNIOR, E. I. Observer-Based Control Design for Switched Affine Systems and Applications to DC - DC Converters. Journal

of Control, Automation and Electrical Systems, Campinas, v. 24, n. 4, p. 535–543, may 2013.

DYNAMIC SYSTEM CONTROL CONSIDERING STATIC FEEDBACK OF THE AVAILABLE OUTPUT – APPLICATION IN $\frac{1}{4}$ ACTIVE SUSPENSION

Abstract: This work presents a robust control design H_∞ , considering static feedback from the available output of the system plant. The control design is applied to a system that represents $\frac{1}{4}$ of a vehicle's active suspension, for a class of linear dynamic systems. The development of the controller design is based on a quadratic Lyapunov function, LMIs (Linear Matrix Inequalities), polytopic uncertainties and a guaranteed cost called H_∞ . The motivation of the work is to design a robust control system, considering polytopic uncertainties in the plant, in order to demonstrate a comparison in the temporal response of the states of the feedback dynamic system and the open-loop dynamic system.

Keywords: Robust H_∞ control, LMIs, Static output feedback.